Chapitre 17 : Suites réelles

Table des matières

1 Ensemble des suites

1.1 Définitions

Définition 1.

On appelle suite réelle toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
On note souvent une suite sous la forme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

Notation : u_n est le terme général de la suite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspond à la suite et $\{u_n\ ,\ n \in \mathbb{N}\} = u(\mathbb{N})$ est l'ensemble des valeurs prises par la suite u.

1.2 Opérations sur l'ensemble des suites

Définition 2.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- On définit la suite somme $u + v$ par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (u + v)_n = u_n + v_n$$
- On définit la suite produit $u \times v$ par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (u.v)_n = u_n \times v_n$$
- On définit la suite $\lambda.u$ par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\lambda.u)_n = \lambda \times u_n$$

L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est stable par chacune de ces opérations.

Exemple 1: Proposer deux suites non nulles dont le produit donne la suite nulle.

2 Suites bornées et suites monotones

2.1 Suites bornées

Définition 3.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On dit que la suite u est minorée lorsque : $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n$.
- On dit que la suite u est majorée lorsque : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.
- On dit que la suite u est bornée lorsqu'elle est minorée et majorée :
$\exists\, (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n \leq M$.

Exemple 2: La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. La suite $(n^2 - 4)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minorée.

Exemple 3: A quelle condition une suite géométrique est-elle bornée ?

Exemple 4: A quelle condition une suite arithmético-géométrie est-elle bornée ?

Exemple 5: Montrer que la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{(-1)^n \cos(n)}{2^n}$ est bornée.

Théorème 1.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
La suite u est bornée si, et seulement si, la suite $|u|$ est majorée.

Théorème 2.

La somme ou le produit de deux suites bornées est encore une suite bornée.

Exemple 6: Montrer que la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos(n) - \sin(5n)$ est bornée.

2.2 Suites monotones

Définition 4.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On dit que la suite u est croissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$.
- On dit que la suite u est décroissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$.
- On dit que la suite u est constante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$.

Exemple 7: Etudier la monotonie de la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{2}{n}$.

Methode 1.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour étudier la monotonie de u,

- On étudie, à n fixé, le signe de la quantité $u_{n+1} - u_n$.
- Si la suite est non nulle, on compare, à n fixé, le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
- S'il existe une fonction f telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n)$, on étudie la monotonie de f et la suite u a la même.

Exemple 8: Déterminer la monotonie de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.

3 Limite d'une suite

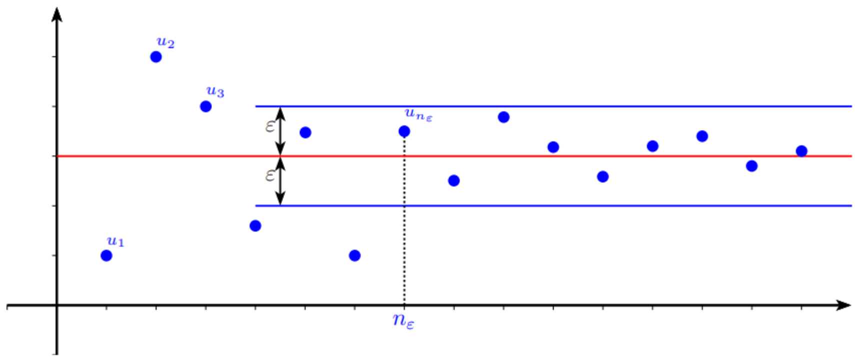
3.1 Limite finie

Définition 5.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que la suite u admet une limite finie ℓ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \big(n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon\big)$$

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. On dit que la suite converge vers ℓ.



Remarques :

- A partir du rang n_0, les termes de la suite sont dans l'intervalle $[\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon]$.
- Le rang n_0 dépend de ε. Plus ε est petit, plus n_0 est grand.

Théorème 3.

1. Si une suite admet une limite finie alors cette limite est unique.
2. Si une suite converge alors elle est bornée.
3. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3.2 Limite infinie

Définition 6.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
On dit que la suite u admet une limite infinie $+\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \big(n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A\big)$$

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. On dit que la suite diverge.

Définition 7.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
On dit que la suite u admet une limite infinie $-\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \big(n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq A\big)$$

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. On dit que la suite diverge.

3.3 Opérations sur les limites

Théorème 4.

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
Ce tableau donne la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$.

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$-\infty$	ℓ'	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**Forme Ind.**
ℓ	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	**Forme Ind.**	$+\infty$	$+\infty$

Théorème 5.

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
Ce tableau donne la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$-\infty$	$\ell' < 0$	0	$\ell' > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**Forme Ind.**	$-\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$	$-\infty$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$-\infty$
0	**Forme Ind.**	0	0	0	**Forme Ind.**
$\ell > 0$	$-\infty$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**Forme Ind.**	$+\infty$	$+\infty$

Exemple 9: Déterminer la nature de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n.n}$.

Théorème 6.

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
Ce tableau donne la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$-\infty$	$\ell' < 0$	0^-	0^+	$\ell' > 0$	$+\infty$
$-\infty$	**F.I.**	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F.I.**
$\ell < 0$	0^+	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0^-
0^-	0^+	0^+	**F.I.**	**F.I.**	0^-	0^-
0^+	0^+	0^-	**F.I.**	**F.I.**	0^+	0^+
$\ell > 0$	0^-	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$-\infty$	$+\infty$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0^+
$+\infty$	**F.I.**	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**F.I.**

Exemple 10: Déterminer la nature de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2n^3 - 5n + 1}{n^3 + 6n^2 + 8}$.

3.4 Croissances comparées

Théorème 7.

Soit $a \in \mathbb{R},\ a > 1$. Soit $b \in \mathbb{R}^*$.

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$$

3.5 Suites extraites

Définition 8.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
On appelle suite extraite de rangs pairs la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{2n}$.
On appelle suite extraite de rangs impairs la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{2n+1}$.

Théorème 8.

Soit u une suite réelle. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Si la suite u converge vers ℓ, diverge vers $-\infty$ ou vers $+\infty$ alors les suites extraites de rangs pairs et de rangs impairs aussi.
2. Si les suites extraites de rangs pairs et de rangs impairs ne convergent pas vers la même limite alors la suite u est divergente.

3.6 Limites et inégalités

Théorème 9.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **convergente**.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > 0$ alors $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geq n_0,\ u_n > 0$.

Théorème 10.

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles **convergentes**.

1. Si $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0$.
2. Si $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n > v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Théorème 11.

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n > v_n$.

1. Si v diverge vers $+\infty$ alors u diverge vers $+\infty$.
2. Si u diverge vers $-\infty$ alors v diverge vers $-\infty$.

Remarque : Pour déterminer la limite d'une suite, on pourra donc penser à la majorer ou à la minorer par une suite dont le comportement est connue.

Théorème 12 (Théorème d'encadrement)**.**

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n > v_n > w_n.$$

Si les suites u et w **convergent vers la même limite finie** ℓ alors la suite v converge vers ℓ.

Théorème 13 (Théorème de la limite monotone)**.**

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Si u est croissante et majorée alors elle converge.
2. Si u est croissante et non majorée alors elle diverge vers $+\infty$.
3. Si u est décroissante et minorée alors elle converge.
4. Si u est décroissante et non minorée alors elle diverge vers $-\infty$.

3.7 Suites adjacentes

Définition 9.

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
On dit que ces suites sont adjacentes lorsque :

1. la suite u est croissante,
2. la suite v est décroissante et
3. la suite $v - u$ converge vers 0.

Exemple 11: Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

Exemple 12: Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \ln(k) \text{ et } v_n = u_n - \ln(n+1)$$

Théorème 14.

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes (avec u croissante et v décroissante).

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$
2. les suites u et v convergent et ont la même limite ℓ.
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1} \leq \ell \leq v_{n+1} \leq v_n$

4 Suites récurrentes

4.1 Définition de la suite

Définition 10.

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur D_f.
On appelle suite récurrente la suite u définie par $\begin{cases} u_0 \in D_f \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

Exemple 13: Soit la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathbf{e}^{-u_n} \end{cases}$

Methode 2.

Pour montrer qu'une telle suite est bien définie :

- Si f est définie sur $\mathbb{R}$, la suite est bien définie.
- Si f est définie sur $D \neq \mathbb{R}$, on montre par récurrence que la suite u est à valeurs dans D.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) : "u_n \in D"$$

Exemple 14: La suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 1} \end{cases}$ existe-t-elle ?

4.2 Etude de la monotonie

Théorème 15.

Soit u une suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction définie sur un intervalle I.
Si la fonction f est croissante alors la suite u est monotone. Plus précisément,

- Si $u_0 \leq u_1$ alors la suite u est croissante.
- Si $u_1 \leq u_0$ alors la suite u est décroissante.

Remarque : On démontre par récurrence ce résultat lorsqu'on veut l'utiliser.

Théorème 16.

Soit u une suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction définie sur un intervalle I.
Si la fonction f est décroissante alors les suites extraites de rangs pairs $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et de rangs impairs $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

Remarque : Si, de plus la suite est bornée, on peut appliquer le théorème de la limite monotone.

4.3 Lorsqu'elle existe, valeur de la limite

Théorème 17 (Théorème du point fixe)**.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si $\left\{\begin{array}{l}\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \\ (u_n) \text{ converge vers } \ell \in I \\ f \text{ est continue sur } I,\end{array}\right.$, alors ℓ vérifie : $\ell = f(\ell)$

Remarque : On résoud sur I l'équation $x = f(x)$ et on en déduit la valeur de la suite u.

Exemple 15: Etudier la suite définie par $\left\{\begin{array}{l}u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n + 2)\end{array}\right.$

5 Suites équivalentes

5.1 Définition

Définition 11.

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles avec la suite v non nulle à partir d'un certain rang n_0.
On dit que la suite u est équivalente la suite v lorsque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

On lit "u_n est équivalent de v_n en $+\infty$" et on note $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Exemple 16:

- $n^5 + 3n^3 - 7 \underset{+\infty}{\sim} n^5$.
- Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ de degré d alors $P(n) \underset{+\infty}{\sim} a_d n^d$.
- Lorsqu'une suite u converge vers $\ell \neq 0$, on peut écrire $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ell$.

Théorème 18.

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et et si v converge vers ℓ alors u converge aussi vers ℓ.

5.2 Opérations sur les équivalents

Théorème 19.

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u = (u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites numériques non nulles à partir d'un certain rang.

1. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $u'_n \underset{+\infty}{\sim} v'_n$ alors $u_n \times u'_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \times v'_n$.
2. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$.
3. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ u_n^\alpha \underset{+\infty}{\sim} v_n^\alpha$.

Exemple 17: Déterminer un équivalent simple de la suite définie par $\forall n \geq 2,\ u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n-1}$.

Exemple 18: Déterminer un équivalent simple de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\ln(n)+n}{n+\sqrt{n}}$.

5.3 Equivalents usuels

Théorème 20.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non nulle à partir d'un certain rang telle que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

$$\cos(u_n) \underset{n+\infty}{\sim} 1 \quad \sin(u_n) \underset{n+\infty}{\sim} u_n \quad \tan(u_n) \underset{n+\infty}{\sim} u_n \quad \mathbf{e}^{u_n} - 1 \underset{n+\infty}{\sim} u_n \quad \ln(1+u_n) \underset{n+\infty}{\sim} u_n$$

$$\cos(u_n) - 1 \underset{n+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2} \quad \sqrt{1+u_n} - 1 \underset{n+\infty}{\sim} \frac{u_n}{2}$$

Exemple 19: Déterminer la limite de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.