Exercice 1:

1.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x - y + 3z = 3 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ - 3y - z = -5 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ - 3y - z = -5 \\ - 2y - z = -4 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ - 3y - z = -5 \\ - z = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - y - 2z \\ y = \dfrac{z-5}{-3} \\ z = 2 \end{cases}$$

donc le système est de rang 3 et $S = \{(-1, 1, 2)\}$.

2.

$$\begin{cases} x + 3y - z = -1 \\ 2x + 5y + z = 0 \\ 3x + 2z = 3 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 3y - z = -1 \\ -y + 3z = 2 \\ 3x + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 3y - z = -1 \\ -y + 3z = 2 \\ -9y + 5z = 6 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 3y - z = -1 \\ -y + 3z = 2 \\ -22z = -12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z - 3y - 1 \\ y = 3z - 2 \\ z = \dfrac{6}{11} \end{cases}$$

donc le système est de rang 3 et $S = \left\{ \left(\dfrac{7}{11}, \dfrac{-4}{11}, \dfrac{6}{11} \right) \right\}$.

3.

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x + y = 2 \\ \dfrac{3}{2}y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

donc le système est de rang 2 et $S = \{(1, 0)\}$.

4. Le système est échelonné de rang 2.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 4z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + y - 2z \\ z = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - \dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

donc $S = \left\{ \left(y - \dfrac{1}{2}, y, \dfrac{3}{4} \right) \ y \in \mathbb{R} \right)$.

5.

$$\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 4x+4y+3z=3 \\ 5x+2y+5z=3 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow 3L_2-4L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 4y+5z=-11 \\ 5x+2y+5z=3 \end{cases}$$

$$\underset{L_3\leftarrow 3L_3-5L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 4y+5z=-11 \\ -4y+10z=-16 \end{cases}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 4y+5z=-11 \\ 15z=-27 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5-2y-z}{3}=\dfrac{13}{5} \\ y=\dfrac{-11-5z}{4}=\dfrac{-1}{2} \\ z=\dfrac{-27}{15}=\dfrac{-9}{5} \end{cases}$$

Le système est de rang 3 et $S=\left\{\left(\frac{13}{5},\frac{-1}{2},\frac{-9}{5}\right)\right\}$.

6.

$$\begin{cases} 2x+2y-z=-1 \\ x+4y+z=-2 \\ x-2y-2z=1 \end{cases} \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+4y+z=-2 \\ 2x+2y-z=-1 \\ x-2y-2z=1 \end{cases}$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+4y+z=-2 \\ -6y-3z=3 \\ x-2y-2z=1 \end{cases}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+4y+z=-2 \\ -6y-3z=3 \\ -6y-3z=3 \end{cases}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+4y+z=-2 \\ -6y-3z=3 \\ 0=0 \end{cases}$$

Le système est donc de rang 2 et $S=\left\{(z,\frac{-z-1}{2},z), z\in\mathbb{R}\right\}$.

Exercice 2: On détermine un système échelonné équivalent.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+az=2 \\ 2x+ay+2z=3 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ 2x+ay+2z=3 \end{cases}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (a-2)y+4z=1 \end{cases}$$

- Si $a=2$, le système est échelonné de rang 3 et $S=\left\{(1,\frac{1}{4},\frac{1}{4})\right\}$.
- Si $a\neq 2$, on continue l'algorithme de Gauss.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (a-2)y+4z=1 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-(a-2)L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (6+a-a^2)z=3-a \end{cases}$$

Or, $6-a-a^2=-(a-3)(a+2)$ donc

- Si $a = 3$, le système initial est équivalent à $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ \quad y + 4z = 1 \\ \qquad 0 = 0 \end{cases}$.

  Le système est de rang 2 et $S = \{5z, 1 - 4z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

- Si $a = -2$, le système initial est équivalent à $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ \quad y - zz = 1 \\ \qquad 0 = 5 \end{cases}$.

  Le système est incompatible et $S = \varnothing$.

- Si $a \neq 2$, $a \neq 3$, $a \neq -2$, le système est de rang 3 et $S = \left\{ \left(1, \dfrac{1}{a+2}, \dfrac{1}{a+2} \right) \right\}$.

Exercice 3:

1. $S = \left\{ \left(1, \dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1 \right) \right\}$.
2. $S = \left\{ \left(\dfrac{z + t - 1}{5}, \dfrac{3z - 7t - 3}{5}, z, t \right), (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
3. $S = \{(-3 - 2m + 2t, -m - 1, 5 + 3m - 3t, t),\ t \in \mathbb{R}\}$