Exercice 1:

1. On compte 5−combinaisons de l'urne donc il y en a $\binom{20}{5} = 15504$.
2. On compte des 4−listes donc il y en a $20^4 = 160000$.
3. On compte des 7−listes sans répétition donc il y en a $\dfrac{20!}{13!} = 21705600$.

Exercice 2:

1. Il y en a 26^p.
2. On a 26 choix pour la première lettre, 25 choix pour la seconde, ..., jusqu'à $26-(p-1)$ choix pour la p−ème. Donc il y en a $\dfrac{26!}{(26-p)!}$.
3. le palindrome est totalement défini par ses 5 premières lettres donc il y a n^5 palindromes de longueur 9.
4. Le palindrome est totalement défini par ses $\dfrac{p}{2}$ premières lettres donc il y a n^p palindromes de longueur $2p$.

Exercice 3:

1. On cherche à fabriquer des 3−listes sans répétition de $[\![1;20]\!]$. Il y a donc $\dfrac{20!}{17!} = 20 \times 19_{\times}18 = 6840$.
2. On cherche à fabriquer des 3−combinaisons de $[\![1;20]\!]$. Il y a donc $\dfrac{20!}{3!.17!} = \dfrac{20 \times 19_{\times}18}{6} = 1140$.

Exercice 4:

1. Un anagramme correspond à une permutation de {O,R,A,N,G,E} donc il y en a $6! = 720$.
2. Pour les anagrammes du mot ANANAS,
   - on choisit les positions des trois a : $\dbinom{6}{3} = 20$ choix possibles.
   - on choisit les positions des deux n parmi les 3 places restantes : $\dbinom{3}{2} = 3$ choix possibles.
   - on place le s à la place restante.

   Il y a donc 60 anagrammes du mot ANANAS.
3. Pour les anagrammes du mot CONCOURS,
   - on choisit les positions des deux C : $\dbinom{8}{2} = 28$ choix possibles.
   - on choisit les positions des deux O parmi les 6 places restantes : $\dbinom{6}{2} = 15$ choix possibles.
   - on place les 4 lettres restantes sur les places restantes donc on compte des permutations de $\{N, U, R, S\}$. Il y en a $4! = 24$.

   Il y a donc 10080 anagrammes du mot CONCOURS.

Exercice 5:

1. (a) On choisit les 3 voyelles parmi les 6 : $\binom{6}{3} = 20$ possibilités.

   (b) On choisit les 5 consonnes parmi les 20 : $\binom{20}{5} = 15504$ possibilités

   On fait ensuite des permutations de ces 8 lettres pour voir tous les mots : 8! possibilités.
   Il y a donc $20 * 15504 * 8! = 9376819200$ mots.

2. On choisit la voyelle qui débute le mot puis on choisit le mot de 5 lettres pour compléter.
   Il y a donc $6 * 20^5 = 19200000$ mots possibles.

Exercice 6:

1. Il y en a $9 \times 10^4 = 90000$.
2. Il y en a $9^5 = 59049$.
3. On place le 0 puis on choisit les 4 autres chiffres donc il y en a $4 * 9^4 = 32805$.
4. On compte plutôt ceux où 0 n'apparait pas puis on les retranche au nombre total de mot.
   On trouve $90000 - 9^5 = 30951$ nombres possibles.
5. On compte les mots où il n'apparait pas et les mots où il apparait exactement une fois.
   On trouve $9^5 + 4 * 9^4 = 85293$.

Exercice 7:
En appliquant la formule qui nous a servi à déterminer le cardinal de $\mathcal{P}(E)$, le cardinal de l'ensemble des parties de E ayant un nombre pair d'éléments est P$= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}$ et le cardinal de l'ensemble des parties de E ayant un nombre impair d'éléments est $I = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}$.

On a $P + I = 2^n$ et

$$P - I = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = (1 + (-1))^n = 0$$

Donc, $P = I$ et $P = I = 2^{n-1}$.
Donc, E possède 2^{n-1} parties de cardinal pair et donc autant de parties de cardinal impair.

Exercice 8: Soit $n \geq 3$.

1. Il y a 2^n applications de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;2]\!]$. Parmi elles, deux seulement sont non-surjectives (les applications constantes). Donc il y a $2^n - 2$ applications surjectives de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;2]\!]$.
2. Il y a 3^n applications de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;3]\!]$.
   Les applications non-surjectives peuvent être classées selon le nombre de valeurs différentes qu'elles prennent
   - soit elles sont constantes : il y en a $\binom{3}{1} = 3$.
   - soit elles prennent exactement 2 valeurs.
     Il y a $\binom{3}{2} = 3$ façons de choisir ses deux valeurs et pour chaque couple de valeurs il y a $2^n - 2$ applications de la sorte.

   Il y a donc $3^n - 3 \times (2^n - 2) - 3 = 3^n - 3 \times 2^n + 3$ applications surjectives de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;3]\!]$.
3. Les applications surjectives de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$ sont bijectives. Il y en a donc $n!$.