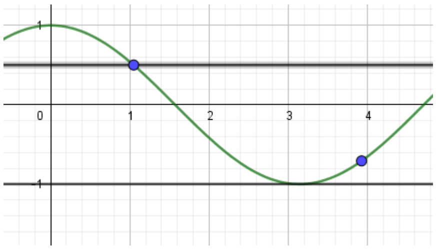
Exercice 1:

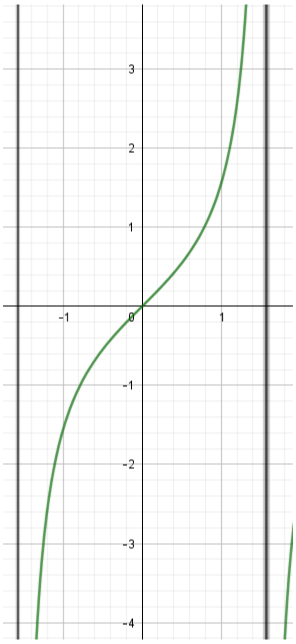
1. La fonction sinus est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{4}\right]$ donc $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{4}\right]\right)=\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

2. Le graphe de la fonction cosinus est le suivant



On en déduit que $\cos\left(\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{4}\right]\right)=\left[-1;\frac{1}{2}\right]$.

3. Le graphe de la fonction cosinus est le suivant



La fonction tangente est croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ avec $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\tan(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(x)=+\infty$.
On en déduit que $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)=\mathbb{R}$.

Exercice 2:

1. $D_f=\mathbb{R}$ comme polynôme de degré 2 et $f(\mathbb{R})=[-1;+\infty[$.

   (a) Injectivité ? $f(1)=0$ et $f(3)=0$ donc on a proposé deux points différents qui ont le même image donc f n'est pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   On va restreindre l'ensemble de départ pour rendre cette fonction injective.
   Soit $(x,y)\in]2;+\infty[^2$ tel que $f(x)=f(y)$.
   $\Rightarrow x^2-4x+3=y^2-4y+3$
   $\Rightarrow x^2-4x=y^2-4y$

$\Rightarrow x^2 - y^2 - 4x + 4y = 0$
$\Rightarrow (x-y)(x+y) - 4(x-y) = 0$
$\Rightarrow (x-y)(x+y-4) = 0$
$\Rightarrow x = y$ ou $x + y = 4$
Or, $x + y > 4$ donc on a $x = y$.
La fonction f est injective de $]2;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

(b) Surjectivité ? Soit $y \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe un réel x tel que $f(x) = y$.

$$\begin{array}{rcl} x^2 - 4x + 3 & = & y \\ x^2 - 4x + 3 - y & = & 0 \\ \Delta & = & 4(1+y) \end{array}$$

Si $y < -1$, cette équation n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$. La fonction f n'est pas une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Si $y \geq -1$, ce polynôme admet deux racines réelles et y a deux antécédents dans $\mathbb{R}$ par f.
La fonction f est surjective de $\mathbb{R}$ sur $[-1;+\infty[$

(c) Bijectivité ? La fonction f est bijective de $]2;+\infty[$ dans $[-1;+\infty[$.

2. $D_f = \left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ et $f(\mathbb{R}) = [-1;+\infty[$.

(a) Injectivité ? Soit $(x,y) \in D_f^2,\ f(x) = f(y)$.
$\Rightarrow \sqrt{2x+3} - 1 = \sqrt{2y+3} - 1$
$\Rightarrow 2x + 3 = 2y + 3$
$\Rightarrow x = y$
Donc la fonction est injective f de $\left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ dans $f(\mathbb{R}) = [-1;+\infty[$.

(b) Surjectivité ? Soit $y \in [-1;+\infty[$.

$$\sqrt{2x+3} - 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{(y+1)^2 - 3}{2}$$

L'équation admet une unique solution donc f est bijective de $\left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ dans $f(\mathbb{R}) = [-1;+\infty[$.

3. $D_f = \mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) = [0,1]$.

(a) Injectivité ? $f(\pi) = f(-\pi)$ donc f n'est pas injective de $\mathbb{R}$ dans $[0;1]$.

(b) Surjectivité ? Soit $y \in [0;1]$.

$$\begin{array}{rcl} |\sin(x)| = y & \Leftrightarrow & \sin(x) = y \text{ ou } \sin(x) = -y \\ & \Leftrightarrow & \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = \arcsin(y) + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \arcsin(y) + 2k\pi \text{ ou} \\ & & x = \arcsin(-y) + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \arcsin(-y) + 2k\pi \end{array}$$

Donc, f est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[0;1]$.
Elle n'est pas bijective car il y a plusieurs antécédents.

4. $D_f = \mathbb{N}$ et $f(D_f) = 2\mathbb{N}$.

(a) Injectivité ? Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $f(m) = f(n)$.
$\Rightarrow 2m = 2n \Rightarrow m = n$.
Donc, f est injective de $\mathbb{N}$ dans $2\mathbb{N}$.

(b) Surjectivité ? Soit $y \in 2\mathbb{N}$.

$$2x = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}$$

donc l'équation admet une unique solution donc f est bijective (et donc surjective) de $\mathbb{N}$ dans $2\mathbb{N}$.

5. $D_f = \mathbb{C}$ et $f(D_z) = \mathbb{C}$.

(a) Bijectivité ? Soit $y \in \mathbb{C}$.

$$f(z) = y \Leftrightarrow \overline{z} = y \Leftrightarrow z = \overline{y}$$

L'équation admet une unique solution donc f est bijective (donc injective et surjective) de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

6. $D_f = \mathbb{R}$ et $f(D_f) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\} = \mathcal{C}(0,1) = \mathbb{U}$.

(a) Injectivité ? Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(\theta) = f(\theta')$.
$\Rightarrow \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta'} \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \theta = \theta' + 2k\pi$
Donc f n'est pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.

(b) Surjectivité ? Soit $y \in \mathbb{U}$.

$$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = y \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \theta = \arg(y) + 2k\pi$$

L'équation admet plusieurs solutions donc f est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.
Elle n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.

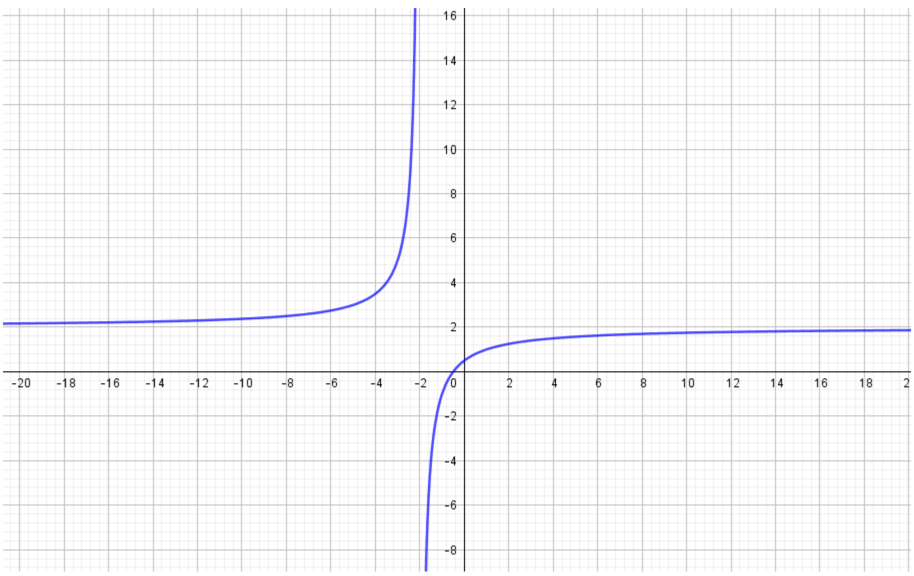
Exercice 3:

1. $D_h = \mathbb{R} \backslash \{-2\}$.

2. On va étudier les variations de h.
La fonction h est dérivable sur D_f comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas.

$$\forall x \in D_h,\ f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$$

Donc, h est strictement croissante sur $]-\infty; -2[$ et sur $]-2; +\infty[$.
$\lim\limits_{x \to -2^+} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -2^-} h(x) = +\infty$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 2$
On en déduit que $h(D_h) =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.



3. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x+2} = y &\Leftrightarrow 2x+1 = y(x+2) \\ &\Leftrightarrow x(2-y) = 2y-1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2y-1}{2-y} \end{aligned}$$

   L'équation admet une unique solution donc h est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

4. La bijection réciproque est donnée par la résolution de l'équation précédente.

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{-2\} \\ y \mapsto \dfrac{2y-1}{2-y} \end{array} \right.$$

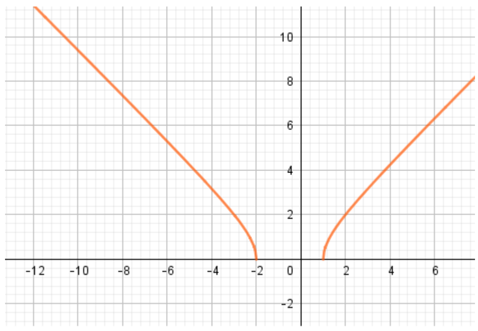
Exercice 4:

1. $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 \geq 0 \right\}$.
   Le polynôme $x^2 + x - 2$ admet deux racines réelles $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$ donc $D_f =]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$.

2. On va étudier les variations de f sur D_f.
   La fonction f est dérivable sur D_f comme composée de fonctions dérivables et

$$\forall x \in D_f,\ f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}}$$

   On en déduit que f est décroissante sur $]-\infty; -2]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.
   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
   $f(-2) = f(1) = 0$. On en déduit que $f(D_f) = [0; +\infty[$.



3. $f(-2) = f(1)$ donc la fonction n'est pas injective de D_f dans $f(D_f)$.

Exercice 5:

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x-1| \geq 0$ donc $D_g = \mathbb{R}$.

2. Pour dériver g, on va donner son expression sans la valeur absolue.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1-x} \text{ si } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} \text{ si } x \geq 1 \end{array} \right.$$

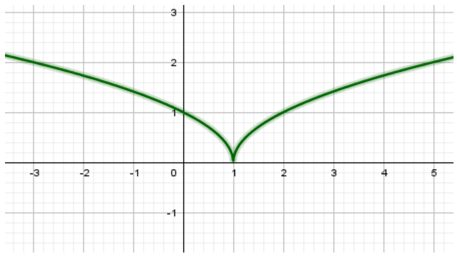
   La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ g'(x) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} \text{ si } x < 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} \text{ si } x > 1 \end{array} \right.$$

On en déduit que la fonction g est décroissante sur $]-\infty;1[$ et croissante sur $]1;+\infty[$.

On étudie maintenant les limites aux bord pour en déduire $g(D_g)$.
$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
$g(1) = 0$ donc $g(D_g) = [0;+\infty[$.

Le graphe de la fonction g est le suivant



3. Le graphe est celui d'une fonction non injective.
   En effet, $g(1) = g(-1) = 0$ donc 0 admet deux antécédents par g.
   On en déduit que g n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6:

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \mathbf{i}x \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. $\left|\dfrac{1+\mathbf{i}x}{1-\mathbf{i}x}\right| = \dfrac{|1+\mathbf{i}x|}{|1-\mathbf{i}x|} = 1$ donc f est bien à valeurs dans $\mathbb{U}$.

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = f(y)$.

$$\begin{aligned} \frac{1+\mathbf{i}x}{1-\mathbf{i}x} = \frac{1+\mathbf{i}y}{1-\mathbf{i}y} &\Leftrightarrow (1+\mathbf{i}x)(1-\mathbf{i}y) = (1-\mathbf{i}x)(1+\mathbf{i}y) \\ &\Leftrightarrow 1 + xy + \mathbf{i}(x-y) = 1 + xy + \mathbf{i}(-x+y) \\ &\Leftrightarrow x - y = -x + y \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

   donc la fonction f est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.

Exercice 7: Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et soit $g \in \mathcal{F}(F,G)$.

1. Supposons la fonction $g \circ f$ injective de E dans G.
   Soit $(x,y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$.
   $\Rightarrow g[f(x)] = g[f(y)]$
   $\Rightarrow x = y$ (car $g \circ f$ est injective)
   La fonction f est donc injective dans E dans F.

2. Supposons la fonction $g \circ f$ surjective de E dans G. On veut montrer que g est surjective de F dans G.
   Soit $y \in G$.
   Puisque $g \circ f$ est surjective de E dans G, $\exists x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = y$
   que l'on peut réecrire $g[f(x)] = y$. Or, $f(x) \in F$.
   On notant $z = f(x)$, on a bien : $\exists z \in F$ tel que $g(z) = y$.
   La fonction g est surjective de E dans F.

__**Exercice** 8__: Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. On va montrer l'égalité des ensembles par double inclusion.

__$\subset$:__ Soit $y \in f(A \cup B)$.
$\Rightarrow \exists\, x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.
$\Rightarrow (\exists\, x \in A$ tel que $y = f(x))$ ou $(\exists\, x \in B$ tel que $y = f(x))$.
$\Rightarrow y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$.
$\Rightarrow y \in f(A) \cup f(B)$.
On en déduit que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

__$\supset$:__ Soit $y \in f(A) \cup f(B)$.
$\Rightarrow y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$.
$\Rightarrow \exists\, x \in A$ tel que $y = f(x)$ ou $\exists\, x \in B$ tel que $y = f(x)$
$\Rightarrow \exists\, x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$
$\Rightarrow y \in f(A \cup B)$.
On en déduit que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

On a montré par double inclusion que $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$.