Exercice 1:

1. $z = 1 + 2\mathbf{i} - 2 - 4\mathbf{i} = -1 - 2\mathbf{i}$

2. $z = (1 + 2\mathbf{i})(2 - 4\mathbf{i}) = 10$

3. $z = (2 - 4\mathbf{i})^2 = -14 - 8\mathbf{i}$.

4. $z = (1 + 2\mathbf{i})^3 = 1 + 3(2\mathbf{i})^2 + 3(2\mathbf{i}) + (2\mathbf{i})^3 = 1 - 12 + 6\mathbf{i} - 8\mathbf{i} = -11 - 2\mathbf{i}$.

5. $z = \dfrac{1 + 2\mathbf{i}}{2 - 4\mathbf{i}} = \dfrac{(1 + 2\mathbf{i})(2 + 4\mathbf{i})}{(2 - 4\mathbf{i})(2 + 4\mathbf{i})} = \dfrac{-6 + 8\mathbf{i}}{20} = \dfrac{-3}{10} + \mathbf{i}\dfrac{2}{5}$.

6. $z = \dfrac{1}{2\mathbf{i}} = \dfrac{-2\mathbf{i}}{4} = \dfrac{-\mathbf{i}}{2}$

7. $z = \displaystyle\sum_{k=1}^{2022} \mathbf{i}^k = \mathbf{i}\frac{1 - \mathbf{i}^{2022}}{1 - \mathbf{i}}$.
   Or, $i^4 = 1$ donc $i^{2022} = (i^4)^{505}.\mathbf{i}^2 = -1$.
   Donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2022} \mathbf{i}^k = \frac{2\mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}} = \frac{2\mathbf{i}(1 + \mathbf{i})}{2} = -1 + \mathbf{i}$

Exercice 2: On note $\mathbf{j} = \dfrac{-1}{2} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. $\mathbf{j}^2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{-1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} = \bar{\mathbf{j}}$.
   $\mathbf{j}^3 = \mathbf{j}.\mathbf{j}^2 = \mathbf{j}.\bar{\mathbf{j}} = |\mathbf{j}|^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$.
   $1 + \mathbf{j} + \mathbf{j}^2 = 1 + \dfrac{-1}{2} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{-1}{2} - \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   - S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k$ alors $\mathbf{j}^n = (\mathbf{j}^3)^k = 1$.
   - S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k + 1$ alors $\mathbf{j}^n = (\mathbf{j}^3)^k.\mathbf{j} = \mathbf{j}$.
   - S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k + 2$ alors $\mathbf{j}^n = (\mathbf{j}^3)^k.\mathbf{j}^2 = \mathbf{j}^2$.

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2021} \mathbf{j}^k = \mathbf{j}^1.\frac{1 - \mathbf{j}^{2021}}{1 - \mathbf{j}} = \mathbf{j}\frac{1 - \mathbf{j}^2}{1 - \mathbf{j}} = \mathbf{j} + \mathbf{j}^2 = -1$.

Exercice 3: $\forall z \in \mathbb{C},\ \exists (x, y) \in \mathbb{R},\ \ z = x + \mathbf{i}y$.

1. $z = \overline{z} \Leftrightarrow x + \mathbf{i}y = x - \mathbf{i}y \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -y \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

2. $2z + 3\overline{z} = 1 - \mathbf{i} \Leftrightarrow 2x + 2\mathbf{i}y + 3x - 3\mathbf{i}y = 1 - \mathbf{i} \Leftrightarrow 5x - \mathbf{i}y = 1 - \mathbf{i} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 1 \\ -y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{5} + \mathbf{i}$.

3. $2\mathbf{i}z = 1 - z \Leftrightarrow z(1 + 2\mathbf{i}) = 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{1 + 2\mathbf{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{1 - 2\mathbf{i}}{5}$.

4. $2\overline{z} = 1 + 2\mathbf{i} \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1 + 2\mathbf{i}}{2} \Leftrightarrow z = \dfrac{1 - 2\mathbf{i}}{2}$.

Exercice 4:

1. $|z| = 2 \Leftrightarrow z \in C(0,2)$
2. $|z| \leq 2 \Leftrightarrow z$ appartient au disque de centre 0 et de rayon 2 $D(0,2)$.
3. $2 \leq |z| \leq 5 \Leftrightarrow z \in D(0,4) \backslash D(0,2)$.
4. $|z| = |z-2| \Leftrightarrow z$ appartient à la médiatrice du segment $[0,2] \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R},\ z = 1 + \mathbf{i}y$.
5. $|z - \mathbf{i}| = |z + 2\mathbf{i}| \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R},\ z = x - \dfrac{\mathbf{i}}{2}$.

Exercice 5: On commence par le module puis on reconnait un angle associé au point d'affixe $\dfrac{z}{|z|}$.

1. $|4\mathbf{i}| = 4$ et $\dfrac{4\mathbf{i}}{|4\mathbf{i}|} = \dfrac{4\mathbf{i}}{4} = \mathbf{i} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ donc $\arg(4\mathbf{i}) = \dfrac{\pi}{2}$.
2. $|-2| = 2$ et $\dfrac{-2}{|-2|} = 1 = \cos(0) + \mathbf{i}\sin(0)$ donc $\arg(-2) = 0$.
3. $|\sqrt{3} + \mathbf{i}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ et $\dfrac{\sqrt{3}+\mathbf{i}}{|\sqrt{3}+\mathbf{i}|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathbf{i}\dfrac{1}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ donc $\arg(\sqrt{3}+\mathbf{i}) = \dfrac{\pi}{6}$.
4. $|1 - \sqrt{3}\mathbf{i}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ et $\dfrac{1-\sqrt{3}\mathbf{i}}{|1-\sqrt{3}\mathbf{i}|} = \dfrac{1}{2} - \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\dfrac{-\pi}{3}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\dfrac{-\pi}{3}\right)$ donc $\arg(1-\sqrt{3}\mathbf{i}) = -\dfrac{\pi}{3}$.
5. $\left|\dfrac{1}{1-\mathbf{i}}\right| = \left|\dfrac{1+\mathbf{i}}{2}\right| = \dfrac{|1+\mathbf{i}|}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{\dfrac{1}{1-\mathbf{i}}}{\left|\dfrac{1}{1-\mathbf{i}}\right|} = \dfrac{\dfrac{1+\mathbf{i}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1+\mathbf{i}}{2} \times \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ donc $\arg\left(\dfrac{1}{1-\mathbf{i}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
6. $\left|\dfrac{4\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}\right| = \dfrac{|4\mathbf{i}|}{|1+\mathbf{i}|} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ et $\dfrac{4\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}} = \dfrac{4\mathbf{i}(1-\mathbf{i})}{2} = 2\mathbf{i} + 2$.
   Donc, $\dfrac{\dfrac{4\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}}{\left|\dfrac{4\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}\right|} = \dfrac{2\mathbf{i}+2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ donc $\arg\left(\dfrac{4\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 6: On rappelle que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta)$.

1. $z = 2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = 2\mathbf{i}$.
2. $z = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi} = \cos(\pi) = +\mathbf{i}\sin(\pi) = -1$.
3. $z = 3\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}} \times 2\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}} = 6\mathbf{e}^{\mathbf{i}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = 6\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{6}} = 6\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = 3\sqrt{3} + 3\mathbf{i}$.
4. $z = \dfrac{3\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}}{2\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}} = \dfrac{3}{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{3}{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} = \dfrac{3}{2}\mathbf{i}$.

Exercice 7:

1.

$$\begin{aligned} |z_1| &= \sqrt{(-3)^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3} \\ z_1 &= 2\sqrt{3}\left(\frac{-3}{2\sqrt{3}}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)=2\sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\mathbf{i}\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\mathbf{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=2\sqrt{3}\mathbf{e}^{\frac{5\mathbf{i}\pi}{6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z_2| &= \sqrt{(\sqrt{2})^2+\sqrt{6}^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \\ z_2 &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathbf{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\sqrt{2}\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z_3| &= \sqrt{(\sqrt{8})^2+\sqrt{8}^2}=\sqrt{16}=4 \\ z_3 &= 4\left(\frac{\sqrt{8}}{4}-\mathbf{i}\frac{\sqrt{8}}{4}\right)=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+\mathbf{i}\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)=4\mathbf{e}^{\frac{-\mathbf{i}\pi}{4}} \end{aligned}$$

2.

$$Z=\frac{z_1^3z_3^4}{z_2^6}=\frac{(2\sqrt{3}\mathbf{e}^{\frac{5\mathbf{i}\pi}{6}})^3(4\mathbf{e}^{\frac{-\mathbf{i}\pi}{4}})^4}{(2\sqrt{2}\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{3}})^6}=\frac{2^3.3\sqrt{3}\mathbf{e}^{\frac{5\mathbf{i}\pi}{2}}4^4\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\pi}}{2^6.2^3\mathbf{e}^{\frac{6\mathbf{i}\pi}{3}}}=-12\sqrt{3}\mathbf{e}^{\frac{5\mathbf{i}\pi}{2}}=-12\sqrt{3}i.$$

Exercice 8:

1. $w^5=\left(\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}}\right)^5=1.$

$$a=w+w^4=\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}}+\left(\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}}\right)^4=\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}}+\mathbf{e}^{\frac{8\mathbf{i}\pi}{5}}=\mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi}(\mathbf{e}^{\frac{-3\mathbf{i}\pi}{5}}+\mathbf{e}^{\frac{3\mathbf{i}\pi}{5}})=-2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

La dernière égalité vient de $\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(\pi-x)=-\cos(x)$.

$$b=w^2+w^3=(\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}})^2+\left(\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}}\right)^3=\mathbf{e}^{\frac{4\mathbf{i}\pi}{5}}+\mathbf{e}^{\frac{6\mathbf{i}\pi}{5}}=\mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi}(\mathbf{e}^{\frac{-\mathbf{i}\pi}{5}}+\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{5}})=-2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

2. Les complexes a et b sont solutions de l'équation du second degré : $(z-a)(z-b)=z^2-(a+b)z+ab=0$. Nous devons calculer $a+b$ et ab.

$$\begin{aligned} a+b &= w+w^4+w^2+w^3=w+w^2+w^3+w^4=-1 \\ ab &= (w+w^4)(w^2+w^3)=w^3+w^4+w^6+w^7=w^3+w^4+w^5.w+w^5.w^2=w^3+w^4+w+w^2=-1 \end{aligned}$$

Donc a et b sont les deux solutions de l'équation $z^2+z-1=0$.

3. $\Delta=1-(-4)=5$. Il y a donc deux solutions réelles : $z_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $z_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
Une de ces solutions est a et l'autre est b.
L'angle $\dfrac{2\pi}{5}$ est dans le premier cadran dons $a=2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)>0$ donc $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $b=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

4. On a donc

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) &= \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\\ \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) &= 1-\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1-\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16} = 1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}\end{aligned}$$

Puisque l'angle $\frac{2\pi}{5}$ est dans le premier cadran, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est un nombre positif donc on peut passer à la racine carrée.

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Exercice 9: Soit $z \in \mathbb{C}$ que l'on note $z = r\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$ sous forme exponentielle.

1. $\overline{z} = \overline{r\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}} = r\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}$.
2. $-z = -r\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi}r\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = r\mathbf{e}^{\mathbf{i}(\pi+\theta)}$.
3. $\mathbf{i}z = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}r\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = r\mathbf{e}^{\mathbf{i}(\frac{\pi}{2}+\theta)}$.
4. $z-\overline{z} = r\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} - r\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta} = r(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}) = 2\mathbf{i}r\sin(\theta) = 2r\sin(\theta)\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} 2r\sin(\theta)\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} \text{ si } \sin(\theta)\geq 0\\ -2r\sin(\theta)\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{3\pi}{2}} \text{ si } \sin(\theta)<0\end{cases}$

Exercice 10:

1. On applique les formules d'Euler pour le cosinus et le sinus

$$\begin{aligned}\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) &= \left(\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}}\right)^2\left(\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}}{2}\right)^2\\ &= \left(\frac{\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}-2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}}{-4}\right)\left(\frac{\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}+2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}}{4}\right)\\ &= \left(\frac{\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}-2+\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}}{-4}\right)\left(\frac{\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}+2+\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}}{4}\right)\\ &= \frac{\mathbf{e}^{4\mathbf{i}\theta}+2\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}-2\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}-4-2\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}+2\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-4\mathbf{i}\theta}}{-16}\\ &= \frac{\mathbf{e}^{4\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-4\mathbf{i}\theta}-2}{-16} = \frac{1-\cos(4\theta)}{8}\end{aligned}$$

On peut également retrouver ce résultat avec les formules de trigonométrie classiques.
On sait que : $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$ et $\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$.
donc $\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) = \frac{1}{4}\sin^2(2\theta) = \frac{1}{4}\times\frac{1-\cos(4\theta)}{2} = \frac{1-\cos(4\theta)}{8}$.

2.

$$\begin{aligned}\sin^3(3\theta) &= \left(\frac{\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-3\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}}\right)^3\\ &= \frac{1}{-8\mathbf{i}}(\mathbf{e}^{9\mathbf{i}\theta}-3\mathbf{e}^{6\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{-3\mathbf{i}\theta}+3\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{-6\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-9\mathbf{i}\theta}) = \frac{1}{-8\mathbf{i}}(\mathbf{e}^{9\mathbf{i}\theta}-3\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta}+3\mathbf{e}^{-3\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-9\mathbf{i}\theta})\\ &= \frac{1}{-8\mathbf{i}}(\mathbf{e}^{9\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-9\mathbf{i}\theta}-3(\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-3\mathbf{i}\theta})) = \frac{\sin(9\theta)-3\sin(3\theta)}{-4} = \frac{3\sin(3\theta)-\sin(9\theta)}{4}\end{aligned}$$

3. Cette fois, on veut faire le travail dans l'autre sens et exprimer $\cos(4\theta)$ comme un polynôme en $cos(\theta)$. Pour cela, on utilise l'autre lien entre $\cos(\theta)$ et $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$: $\cos(\theta) = \mathrm{Re}(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})$.

$$\begin{aligned}
\cos(4\theta) &= \mathrm{Re}(\mathbf{e}^{4\mathbf{i}\theta}) = \mathrm{Re}((\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})^4) = \mathrm{Re}[(\cos(\theta)+\mathbf{i}\sin(\theta))^4] \\
(\cos(\theta)+\mathbf{i}\sin(\theta))^4 &= \cos^4(\theta) + 4\mathbf{i}\cos(\theta)\sin^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - 4\mathbf{i}\cos(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^4(\theta) \\
\cos(4\theta) &= \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta) \\
&= \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)(1-\cos^2(\theta)) + (1-\sin^2(\theta))^2 \\
&= 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1
\end{aligned}$$

4. On fait pareil et on utilise encore le binôme de Newton pour développer la puissance 5.

$$\begin{aligned}
\sin(5\theta) &= \mathrm{Im}[(\cos(\theta)+\mathbf{i}\sin(\theta))^5] \\
(\cos(\theta)+\mathbf{i}\sin(\theta))^5 &= \cos^5(\theta) + 5\mathbf{i}\cos^4(\theta)\sin(\theta) - 10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) - 10\mathbf{i}\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) + 5\cos(\theta)\sin^4(\theta) + i\sin \\
\sin(5\theta) &= 5\cos^4(\theta)\sin(\theta) - 10\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^5(\theta) \\
&= 5(1-\sin^2(\theta))^2\sin(\theta) - 10(1-\sin^2(\theta))\sin^3(\theta) + \sin^5(\theta) \\
&= 16\sin^5(\theta) - 20\sin^3(\theta) + 5\sin(\theta)
\end{aligned}$$

<u>Exercice</u> <u>11:</u>

1. $z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$ donc l'équation admet une unique solution $z = 2$.
2. $z^2 = -4 \Leftrightarrow z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 - (2\mathbf{i})^2 = 0 \Leftrightarrow (z-2\mathbf{i})(z+2\mathbf{i}) = 0 \Leftrightarrow z = 2\mathbf{i}$ ou $z = -2\mathbf{i}$.
3. $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 5 = 9 - 40 = -31 < 0$. L'équation admet deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-3+\mathbf{i}\sqrt{31}}{4}$ et $z_2 = \dfrac{-3-\mathbf{i}\sqrt{31}}{4}$.

Exercice 12:
Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(|a-b|^2+|a+b|^2\right) &= \frac{1}{2}\left((a-b)\overline{(a-b)}+(a+b)\overline{(a+b)}\right)=\frac{1}{2}\left((a-b)(\overline{a}-\overline{b})+(a+b)(\overline{a}+\overline{b})\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(a\overline{a}-a\overline{b}-b\overline{a}+\overline{b}b+a\overline{a}+a\overline{b}+b\overline{a}+\overline{b}b\right)=\frac{1}{2}\left(2|a|^2+2|b|^2\right)=|a|^2+|b|^2\end{aligned}$$

Exercice 13:

1. Soit $a=x+\mathbf{i}y\in\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}|1+a|^2 &= |1+x+\mathbf{i}y|^2=(1+x)^2+y^2=1+2x+x^2+y^2\\ (1+|a|)^2 &= 1+2|a|+|a|^2=1+2|a|+x^2+y^2\end{aligned}$$

   Or, $\mathrm{Re}(a)\leq|a|$ donc $x\leq|a|$ d'où $|1+a|^2\leq(1+|a|)^2$. En passant à la racine carré, $|1+a|\leq 1+|a|$.

2. Soit $(z,z')\in(\mathbb{C}^*)^2$.

$$\begin{aligned}|z+z'| &= \left|z\left(1+\frac{z'}{z}\right)\right|=|z|\left|1+\frac{z'}{z}\right|\leq|z|\left(1+\left|\frac{z'}{z}\right|\right) \text{ par la question précédente}\\ |z+z'| &\leq |z|+|z'|\end{aligned}$$

3. On raisonne par récurrence pour démontrer $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ P(n)$: "$\forall(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n,\ \left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|\leq\sum_{k=1}^{n}|z_k|$"

   - Initialisation: Pour $n=1$.
     Soit $z\in\mathbb{C}$. $|z|\leq|z|$ donc $P(1)$ est vraie.
   - Hérédité: Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie.
     Soit $(z_1,\ldots,z_{n+1})\in\mathbb{C}^{n+1}$.

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n+1}z_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}z_k+z_{n+1}\right|\\ &\leq \left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|+|z_{n+1}| && \text{par l'inégalité triangulaire}\\ &\leq \sum_{k=1}^{n}|z_k|+|z_{n+1}| && \text{par hypothèse de récurrence}\\ &\leq \sum_{k=1}^{n+1}|z_k|\end{aligned}$$

     Donc, $P(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion: Par le principe de récurrence, $\forall(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n,\ \left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|\leq\sum_{k=1}^{n}|z_k|$.

Exercice 14: On raisonne par récurrence pour généraliser les formules démontrées pour deux complexes.