Exercice 1:

1. $\sum_{k=3}^{10} k$.
2. $\sum_{k=0}^{n} a^{2k}$.
3. C'est le produit de tous les nombres pairs plus petits que 2n donc
$2 \times 4 \times 6 \times ... \times (2n-2) \times 2n = \prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = \boxed{2^n n!}$.
4. C'est le produit de tous les nombres impairs plus petits que $(2n+1)$ donc
$1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1) \times (2n+1) = \prod_{k=0}^{n}(2k+1)$.
En fait, c'est le produit de tous les nombres plus petits que $(2n+1)$ divisé par tous les nombres pairs plus petits que $2n$
$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \dfrac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \dfrac{(2n+1)!}{2^n n!}$.

Exercice 2:

1. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{i=1}^{n} k - \sum_{i=1}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$.
2. $\sum_{k=4}^{n+1}(3k+7) = 3\sum_{k=4}^{n+1} k + 7\sum_{k=4}^{n+1} 1 = 3\dfrac{(n+1-4+1)(n+1+4)}{2} + 7(n+1-4+1) = \dfrac{3(n-2)(n+5)}{2} + 7(n-2)$
$= \dfrac{(n-2)(3n+29)}{2}$.
3. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k = \dfrac{1}{2}\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1-\frac{1}{2^n}}{2(1-\frac{1}{2})} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$ donc $\lim_{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k} = \lim_{+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) = 1$.
4. $\prod_{k=1}^{n} k\mathbf{e}^k = \prod_{k=1}^{n} k \prod_{k=1}^{n} \mathbf{e}^k = n!.\mathbf{e}^{\sum_{k=1}^{n} k} = n!\mathbf{e}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Exercice 3:

$$\sum_{k=1}^{50}(2k) = 2\sum_{k=1}^{50} k = 2.\frac{50(50+1)}{2} = 50 \times 51 = 2550$$

$$\prod_{k=1}^{50}(2k) = 2^{50}\prod_{k=1}^{50} k = 2^{50}.50!$$

Exercice 4:

1. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right) == \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$.

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^k(1-q) = \sum_{k=1}^{n}\left(q^k - q^{k+1}\right) = q - q^{n+1}.$

3. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times \dots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\times k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)k! = \sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)k! - k!\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)! - k!\right] = (n+1)! - 1.$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{6}\left(n(2n+1)+3n\right)$
$\displaystyle = \frac{n+1}{6}.(2n^2+4n) = \frac{2n(n+1)(n+2)}{6}.$

6. Soit $k \in [\![2,n]\!]$. $\displaystyle 1-\frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{k-1}{k}\frac{k+1}{k}.$
$\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\frac{k+1}{k} = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{1}{n}\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$

<u>Exercice 5</u>: Notons $\displaystyle S = \sum_{k=0}^{n} k^3$. S est aussi égal à $\sum_{k=\mathbf{1}}^{n} k^3$.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4 - k^4 = (n+1)^4$ par la formule des sommes télescopiques.

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4 - k^4 = \sum_{k=0}^{n}(4k^3+6k^2+4k+1) = 4\sum_{k=0}^{n}k^3 + 6\sum_{k=0}^{n}k^2 + 4\sum_{k=0}^{n}k + \sum_{k=0}^{n}1.$
Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4 - \sum_{k=0}^{n}k^4 = 4S + 6\sum_{k=0}^{n}k^2 + 4\sum_{k=0}^{n}k + n + 1.$
Ainsi, $\displaystyle 4S = (n+1)^4 - 6\sum_{k=0}^{n}k^2 - 4\sum_{k=0}^{n}k - (n+1) = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)$
$= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) = n^2(n+1)^2$
Finalement, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$

<u>Exercice 6</u>: Par les formules de trigonométrie, $\forall 1 \leq k \leq n$, $\displaystyle\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}.$

Donc, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{\sin(\frac{x}{2^{k-1}})}{2\sin(\frac{x}{2^k})} = \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin(\frac{x}{2^{k-1}})}{\sin(\frac{x}{2^k})} = \frac{1}{2^n}\frac{\sin(x)}{\sin(\frac{x}{2^n})}.$

<u>Exercice 7</u>:

1. $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n}1 = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}1 = \sum_{i=1}^{n-1}\underbrace{(n-(i+1)+1)}_{\text{nombre d'entiers entre } i+1 \text{ et } n} = \sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \sum_{i=1}^{n-1}n - \sum_{i=1}^{n-1}i = n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2}$
donc $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n}1 = \frac{n(n-1)}{2}.$

2. $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}^{n} j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j = \sum_{i=1}^{n} \frac{n(n+1)}{2} = n\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}.$

3. $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}^{n} (i+j)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^2+2ij+j^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 2ij + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^2.$

   - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^2 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{\text{formule sur les carrés}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^2 = n \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}.$
   - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}.$
   - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

   Finalement,
   $$\sum_{1\leq i,j\leq n}^{n} (i+j)^2 = 2.\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{2} = \frac{2n^2(n+1)(2n+1)+3n^2(n+1)^2}{6}$$
   $$= \frac{n^2(n+1)[2(2n+1)+3(n+1)]}{6} = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}.$$

4. $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} (5i^2 - 18i^2j^2 + 5j^2) = 5\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 - 18\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2j^2 + 5\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^2.$
   $$= 10\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} i^2 - 18\left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right)^2 = 10.\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} - 18.\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36}$$
   $$= \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{2}\left(\frac{10}{3} - (n+1)(2n+1)\right).$$

Exercice 8:

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^i1^{n-i} = (1+1)^n = 2^n.$

2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i1^{n-i} = (1+(-1))^n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq 0 \\ 1 \text{ si } n = 0. \end{cases}$

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}3^{i-1} = \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}3^{i-1}\times 1 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}3^i1^{n-i} = \frac{1}{3}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}3^i1^{n-i} - \underbrace{1}_{i=0}\right] = \frac{(3+1)^n-1}{3} = \frac{4^n-1}{3}.$

4. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. $\displaystyle\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}.$
   $$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{n+1}\binom{n+1}{l} = \frac{1}{n+1}\left[\sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l} - \binom{n+1}{0}\right] = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1).$$

Exercice 9:

1. $\displaystyle k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k\mathbf{-1+1})!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1)!} = n\binom{n-1}{k-1}.$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}=2^{n-1}$.

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{l=0}^{n-1}n\binom{n-1}{l}=n\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}=n2^{n-1}$.

Exercice 10:

On remarque d'abord que P correspond en fait à la somme des $\binom{n}{k}$ pour k pair inférieur à n et I correspond à la somme des $\binom{n}{k}$ pour k impair inférieur à n. Ainsi, $I+P=\displaystyle\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}=2^n$.

De plus, $P-I$ correspond donc à la somme des $\binom{n}{k}$ avec un signe positif lorsque k est pair et négatif sinon.

Donc, $P-I=\displaystyle\sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}-\sum_{0\leq 2k+1\leq n}\binom{n}{2k+1}=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\binom{n}{l}$.

On a donc le système suivant:

$$\begin{cases} P+I=2^n \\ P-I=0 \end{cases} \Rightarrow P=I=2^{n-1}$$

Exercice 11:

Par le binôme de Newton, $(a-b)^6=\displaystyle\sum_{l=0}^{6}\binom{6}{l}a^l(-b)^{6-l}$. Le coefficient en a^4b^2 correspond à $l=2$, c'est-à-dire $(-1)^2\binom{6}{2}=15$.

Toujours par le binôme de Newton, $(a-b+2c)^9=\displaystyle\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}(a-b)^{9-k}(2c)^k$.

On cherche le terme en c^3 donc on s'intéresse à $k=3$ c'est à dire $\binom{9}{3}2^3(a-b)^6$.

Le terme en $a^4b^2c^3$ est donné par celui devant a^4b^2 dans $(a-b)^6$.

Ce coefficient est donc $\binom{9}{3}2^3\binom{6}{2}=10080$.

Exercice 12: $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=n+\dfrac{n(n-1)}{2}+\dfrac{(n-2)(n-1)n}{6}=\dfrac{6n+3n(n-1)+(n-2)(n^2-n)}{6}=\dfrac{n^3+5n}{6}$.

Donc l'équation à résoudre est $n^3+5n=20n$ c'est à dire $n(n^2-25)=0$.

On cherche une solution strictement positive donc $n=5$ est la seule solution au problème posé.

Exercice 13:

1. On applique le binôme de Newton aux 2 termes de la somme:

$$\begin{cases} (a-b)^{2n}=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}a^k(-b)^{2n-k} \\ (a+b)^{2n}=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}a^kb^{2n-k} \end{cases} \Rightarrow (a-b)^{2n}+(a+b)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}a^kb^{2n-k}[(-1)^{2n-k}+1]$$

Or, $(-1)^{2n-k}+1 = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } k \text{ est impair} \\ 2 \text{ si } k \text{ est pair.} \end{array} \right.$

Finalement, il ne reste que les indices k pairs dans la somme c'est à dire quand $k = 2p$ avec $0 \leq p \leq n$.

Donc, $(a-b)^{2n} + (a+b)^{2n} = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p} a^{2p} b^{2n-2p} \times 2 = 2 \sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p} (a^2)^p (b^2)^{n-p}$.

2. Pour calculer s_n , on applique la formule avec $a = 1$ et $b = \sqrt{2}$: $s_n = 2 \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p} (a^2)^p (b^2)^{n-p}$.

   C'est bien un entier naturel pair.